Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne 2002, t. 35, z. 2, s. 265–270

Ks. JERZY DADACZYŃSKI

POJĘCIE NIESKOŃCZONOŚCI W MATEMATYCE

Początek matematyki jako nauki wiąże się ze starożytną Grecją. Wprawdzie już w starożytnym Egipcie i Babilonii rozwinięto wiele technik rachunkowych, ale dopiero w Grecji antycznej zaczęto budować matematykę jako system zdań dedukowany z niewielkiego zbioru zdań wyjściowych – aksjomatów. Tak pojmował matematykę nie tylko Euklides i jego następcy, lecz także najprawdopodobniej już pitagorejczycy, którzy zbudowali niezachowany do naszych czasów system geometrii.

Pojęcie nieskończoności zostało uwikłane w matematykę już w czasach starożytnych. Grecy zdawali sobie sprawę z tego, że w geometrii mają do czynienia z nieskończonymi klasami trójkątów równobocznych, rombów itd. Odkrycie niewymierności prowadziło do wprowadzenia technik mających przybliżać te wielkości. Czyniono to za pomocą nieskończonych ciągów, na przykład $\sqrt{2}$ przybliżano za pomocą nieskończonego ciągu wielkości wymiernych: 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ... Jednak niedługo potem uświadomiono sobie, że nieograniczone posługiwanie się zbiorami nieskończonymi prowadzi do pogwałcenia aksjomatu antycznej matematyki, stwierdzającego, że „część jest mniejsza do całości”. Ujawniła to burzliwa dyskusja toczona wokół aporii Zenona. Ostatecznie dominujące do XIX w. – przynajmniej na poziomie filozoficznej refleksji nad matematyką – stanowisko wobec problemu nieskończoności określił Arystoteles. Odrzucił on istnienie nieskończoności aktualnej i dopuścił jedynie istnienie nieskończoności potencjalnej. Nie zdefiniował przy tym obydwu typów nieskończoności, a jedynie podał ich paradygmaty. Wzorcem nieskończoności aktualnej był na raz dany zbiór wszystkich liczb naturalnych, natomiast nieskończoności potencjalnej – wielkość zmienna, która mogła być uczyniona większą od dowolnej wielkości skończonej (dziś powiedziano by: ciąg – lub ogólniej funkcja – rozbieżne do nieskończoności). Sformułowany w starożytności aksjomat Eudoksosa-Archimedesa miał eliminować wielkości aktualnie nieskończenie wielkie i aktualnie nieskończenie małe z matematyki. Jednakże dokładnie ci sami dwaj uczeni wprowadzili z powrotem do matematyki nieskończoność „kuchennymi drzwiami”, podając metodę wyczerpywania (Eudoksos), w której za pomocą właśnie nieskończonych ciągów wielkości przybliżano jako wartość graniczną pole lub objętość figur geometrycznych oraz wprowadzając pojęcie dolnych i górnych sum całkowych (Archimedes), które domagało się wcześniejszego zaakceptowania istnienia nieskończonych ciągów wielkości [1].

Matematycy XVII i XVIII w. w ogóle nie przejmowali się w swej praktyce matematycznej dyrektywą Arystotelesa. Zaczęło się to od przejęcia metod analitycznych wypracowanych w starożytności przez Eudoksosa i Archimedesa. Wkrótce w podstawach rachunku różniczkowego pojawiły się wielkości nieskończenie małe, fluksje i fluenty (I. Newton), które – zdaniem przynajmniej części matematyków – nie spełniały aksjomatu Eudoksosa-Archimedesa. Dowolnie posługiwano się nieskończonymi szeregami, odkrywając przy tym wiele ich ciekawych własności [2].

Wielkości aktualnie nieskończenie małe zostały wyeliminowane z podstaw analizy [3] w procesie jej arytmetyzacji, który zapoczątkowali na początku XIX w. B. Bolzano i A. Cauchy, opierając analizę na określonym w kategoriach liczb rzeczywistych – a więc skończonych – pojęciu granicy. Jednakże nadal posługiwano się (budując arytmetyczne podstawy analizy) nieskończonymi ciągami i – szerzej – zbiorami, na przykład konstruując liczby rzeczywiste (K. Weierstrass, G. Cantor, R. Dedekind). Wychodząc z konkretnych potrzeb analizy, związanych z badaniami szeregów Fouriera, G. Cantor stworzył teorię zbiorów nieskończonych – teorię mnogości. Niemiecki matematyk przejął definicję refleksywną zbiorów nieskończonych, sformułowaną przez B. Bolzana oraz R. Dedekinda. Wiązało się to z ostatecznym odrzuceniem antycznej zasady stwierdzającej, że „część jest mniejsza od całości". On również przyczynił się do ostatecznego podważenia obowiązującej – na płaszczyźnie filozoficznej – od czasów Arystotelesa zasady nie eliminacji zbiorów aktualnie nieskończonych. Zbudowana przez G. Cantora teoria mnogości okazała się – dzięki pracom przede wszystkim G. Fregego, ale również G. Cantora – dziedziną podstawową, z której można było wyprowadzić całą, wcześniej zarytmetyzowaną, matematykę dziewiętnastowieczną [4].

Ale właśnie wówczas sam G. Cantor, a także C. Burali-Forti oraz B. Russell odkryli w teorii mnogości, czyli w teorii zbiorów nieskończonych, kilka antynomii. I właśnie dlatego, że teoria mnogości była wówczas traktowana jako teoria podstawowa całej matematyki, kryzys ów dotyczył nie

---

[1] Por. I. G. B a s z m a k o w a, *Grecja starożytna*, [w:] *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początków XIX stulecia*, red. A. P. Juszkiewicz, tłum. z rosyjskiego S. Dobrzycki, t. I, Warszawa 1975, s. 64–115; I. G. B a s z m a k o w a, *Kraje hellenistyczne i imperium rzymskie*, [w:] *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych...*, t. I, s. 116–168.

[2] Por. A. P. J u s z k i e w i c z, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, [w:] *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początków XIX stulecia*, t. III, Warszawa 1977, s. 262–403.

[3] G. Cantor, po zbudowaniu swej przedaksjomatycznej teorii mnogości, starał się udowodnić nieistnienie wielkości aktualnie nieskończenie małych. Zasady formalizmu w podstawach matematyki pozwoliły na zbudowanie aksjomatyk wielkości, które zawierały zaprzeczenie aksjomatu Eudoksosa-Archimedesa. Tak właśnie A. Robinson zbudował analizę niestandardową, która posługuje się wielkościami niearchimedesowymi, aktualnie nieskończenie małymi.

[4] Zasadnicze wiadomości na temat arytmetyzacji matematyki w dziewiętnastym wieku zawarte są w pracy N. B o u r b a k i, *Elementy historii matematyki*, tłum. z francuskiego S. Dobrzycki, Warszawa 1980, s. 35–37.

tylko teorii zbiorów nieskończonych, ale całej matematyki. „Winny” powstania znanych antynomii teoriomnogościowych okazał się stosowany *implicite* przez G. Cantora oraz G. Fregego aksjomat nieograniczonej komprehensji. Znane antynomie wyeliminowano dzięki teorii typów logicznych (B. Russell, A. N. Whitehead) oraz aksjomatyzacji teorii mnogości (E. Zermelo). W teoriach tych ograniczono stosowalność nieograniczonego aksjomatu komprehensji lub zastąpiono go bardziej restryktywnymi aksjomatami. Istota eliminacji znanych antynomii polegała na dookreśleniu pojęcia zbioru[5].

Zauważono jednak, że wiele antynomii (Burali-Fortiego, największej liczby kardynalnej) powstawało wtedy, gdy w sposób „nieostrożny” operowano zbiorami nieskończonymi. Dlatego pojawiły się głosy, szczególnie w obozie intuicjonistów, że istotną przyczyną powstania antynomii w podstawach matematyki było nie tyle niedookreślenie pojęcia zbioru w systemach Fregego i Cantora, ile wprowadzenie do matematyki i jej podstaw zbiorów nieskończonych. Rozumowano w następujący sposób: wprawdzie znane antynomie udało się wyeliminować, ale nikt nie może zagwarantować tego, że dalsze posługiwanie się zbiorami nieskończonymi nie doprowadzi do ujawnienia nowych antynomii, dotychczas nieznanych. Dlatego w obozie intuicjonistów holenderskich zdecydowano się na usunięcie zbiorów aktualnie nieskończonych z podstaw matematyki oraz z pozostałych jej gałęzi. Doprowadziło to do powstania matematyki intuicjonistycznej, znacznie „okrojonej” w stosunku do tradycyjnej. Intuicjoniści mieli już poważne problemy na poziomie określenia *continuum* liczb rzeczywistych[6].

Znaczna część matematyków opowiedziała się jednak za zachowaniem klasycznej matematyki, wraz z „wbudowanym” w nią pojęciem nieskończoności aktualnej. Zajmując jednak taką postawę, należało w jakiś sposób odeprzeć argument intuicjonistów, że dalsze operowanie nieskończonością aktualną w matematyce nie doprowadzi do ujawnienia kolejnych antynomii, które mogłyby podważyć fundament matematyki klasycznej (nieintuicjonistycznej).

Zadania tego podjął się najwybitniejszy matematyk początku XX w., D. Hilbert. W celu obrony całej matematyki klasycznej, z „wkomponowaną” w nią nieskończonością, rozwinął on cały program, nazwany później programem formalizmu. Najdobitniej i najpełniej sformułował D. Hilbert zasady swojego programu w tekście, który nieprzypadkowo został przez niego zatytułowany *O nieskończoności*[7].

---

[5] Por. L. B o r k o w s k i, *Logika formalna*, Warszawa 1970, s. 285–309.

[6] Por. J. P e r z a n o w s k i, *Intuicjonizm*, [w:] *Mała encyklopedia logiki*, Wrocław 1988, s. 74–77.

[7] D. H i l b e r t, „Mathematische Annalen” 1926, 95, s. 161–190, tłum. z niemieckiego R. Murawski, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór i oprac. R. Murawski, Poznań 1986, s. 288–307.

Jest to tekst wykładu wygłoszonego 4 VI 1925 r., na zebraniu Westfalskiego Towarzystwa Matematycznego w Münster *Über das Unendliche*, dla uczczenia pamięci K. Weierstrassa.

Swój artykuł rozpoczyna D. Hilbert od pytania, czym jest nieskończoność. Odpowiada na to pytanie, stwierdzając, że nieskończoność nie jest niczym, co można by znaleźć w rzeczywistości fizycznej. Nie ma w otaczającym nas świecie wielkości nieskończonych.

Aby uzasadnić to twierdzenie, D. Hilbert odwołuje się do współczesnej mu fizyki. Przyjmowane fizyczne modele materii i energii nie dopuszczały ciągłości, *continuum*, niepodzielności do nieskończoności materii czy energii. Nie można bez końca dzielić kawałka metalu, natrafi się bowiem na atomy, czy ich części składowe, które są niepodzielne. Mają one bardzo małe, ale określone, skończone wymiary, wyrażalne za pomocą liczb rzeczywistych. A zatem – taki wniosek wyciąga D. Hilbert – w przyrodzie nie występują wielkości aktualnie nieskończenie małe[8].

Nie występują też w przyrodzie, jego zdaniem, wielkości nieskończenie wielkie. Wystarczy w tym wypadku zbadać największy przedmiot rzeczywistości fizycznej, to znaczy cały wszechświat. Kilka lat przed powstaniem tekstu *O nieskończoności* D. Hilberta, A. Einstein zbudował pierwszy matematyczny model wszechświata, do jego wniosków odwołał się matematyk z Getyngi. A. Einstein posłużył się w swojej kosmologii nieeuklidesową, riemannowską geometrią. W takim wszechświecie można się poruszać po prostych – wielkich kołach – bez natrafienia na jakąkolwiek granicę. Nie swiadczy to jednak o tym, że nieograniczony wszechświat jest nieskończony. Wszechświat posiada bowiem bardzo wielki, ale jednak skończony promień. Inaczej jeszcze: ten wszechświat można zamknąć w sześcianie o skończonych wymiarach. Zatem i liczby galaktyk, gwiazd, planet, atomów, i elektronów czy protonów we wszechświecie są bardzo wielkie, ale wyrażalne skończonymi liczbami naturalnymi[9].

Wniosek, jaki wyciągnął D. Hilbert, był następujący: w świecie fizycznym nie ma wielkości nieskończonych – ani nieskończenie wielkich, ani nieskończenie małych. A mimo to matematyka ma prawo, zdaniem D. Hilberta, posługiwać się nieskończonością[10]. Jest bowiem nieskończoność ideą w sensie kantowskim[11], czyli pojęciem, które nie ma żadnych desygnatów w rzeczywistości fizycznej, pojęciem rozumu, któremu w świecie fizycznym nic nie odpowiada[12].

---

[8] Por. D. H i l b e r t, *Über das Unendliche*..., s. 290.

[9] Por. tamże, s. 291.

[10] D. Hilbert twierdził wprost, że teoria mnogości G. Cantora i nabudowana na niej arytmetyka liczb pozaskończonych jest jednym z najwybitniejszych osiągnięć „ducha matematycznego" i „intelektu ludzkiego" (por. D. H i l b e r t, *Über das Unendliche*..., s. 293).

[11] I. Kant zaliczał do idei pojęcia Boga, duszy i wszechświata.

[12] D. Hilbert pisał: „na koniec chcemy jeszcze raz wrócić do naszego właściwego tematu i wyciągnąć pewne wnioski z całych naszych rozważań nad nieskończonością. Końcowy wynik jest następujący: nieskończoność nie jest realizowana nigdzie w rzeczywistości. Nie istnieje ona w naturze, nie stanowi też prawomocności bazy naszej myśli racjonalnej – godnej uwagi harmonii pomiędzy bytem i myślą. W przeciwieństwie do wcześniejszych prób Fregego i Dedekinda jesteśmy przekonani, że pewne pojęcia intuicyjne i pewien wgląd (*Einsicht*) są niezbędnymi warunkami jakiejkolwiek wiedzy naukowej, że sama logika nie wystarczy. Operowanie nieskończonością może być uprawomocnione tylko przez skończoność. Rola, jaka pozostaje do odegrania nieskończono-

Ale takie postawienie sprawy, czyli utożsamienie pojęcia nieskończoności z kantowską ideą, nie rozwiązywało jeszcze zasadniczej sprawy. Pozostawało pytanie, czy matematyka z „wkomponowaną" w nią nieskończonością nie „wygeneruje" nowych antynomii. Czyli w istocie chodziło o wykazanie, że nieskończoność jest, jak przyjmował I. Kant i za nim D. Hilbert, pojęciem niesprzecznym. Jak już wspomniano, tego zadania podjął się matematyk z Getyngi i w tym celu sformułował program formalizmu. Jego realizacja miała polegać na:

1) aksjomatyzacji całej matematyki;

2) formalizacji matematyki, tak aby każdy jej wyraz, każde zdanie i każdy dowód stanowił ciąg znaków;

3) stworzeniu teorii dowodu, czyli metamatematyki, w której za pomocą środków matematyki (skończonościowej, finistycznej) byłoby możliwe badanie matematyki;

4) wykazaniu za pomocą finistycznych środków teorii dowodu niesprzeczności matematyki z „wkomponowanym" pojęciem nieskończoności [13].

Dowód niesprzeczności matematyki miał się, zdaniem D. Hilberta, sprowadzać do dowodu niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych. Wynikało to stąd, że cała matematyka dziewiętnastowieczna była arytmetyzowalna, to znaczy sprowadzalna do arytmetyki liczb naturalnych. D. Hilbert podał nawet szkic dowodu niesprzeczności arytmetyki. Miał on wyglądać następująco: jeśliby w arytmetyce liczb naturalnych wystąpiła dowolna sprzeczność p i $\sim p$, to z tej sprzeczności można by wywieść każde zdanie – również fałszywe zdanie $1 \neq 1$. Jeśliby zatem udało się udowodnić, że w arytmetyce nie można dowieść zdania $1 \neq 1$, to wynikałoby stąd, że w arytmetyce liczb naturalnych nie może wystąpić żadna sprzeczność. Zatem dowód niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych, a więc i całej matematyki klasycznej (z „wkomponowaną" nieskończonością) sprowadzałby się do dowodu, że w tej teorii nie można dowieść formuły $1 \neq 1$. Dowód tej ostatniej własności miał być przeprowadzony w teorii dowodu (metamatematyce) [14].

Jednak nadzieje D. Hilberta na przeprowadzenie dowodu niesprzeczności matematyki infinistycznej za pomocą metod finistycznych zostały podważone przez ogłoszenie wyników K. Gödla. Drugie twierdzenie

---

ści, jest jedynie rolą idei – jeżeli, zgodnie ze słowami Kanta, pod ideą rozumieć pojęcie rozumu (*Vernunftbegriff*), które przekracza (*übersteigt*) wszelkie doświadczenie i za pomocą którego to, co konkretne, zostaje dopełnione w sensie ogólności (*im Sinne der Totalität*) – idei, której możemy bez obaw zaufać w ramach, które ustanowiła naszkicowana tu przeze mnie teoria". D. H i l b e r t, *Über das Unendliche*..., tłum. z niemieckiego R. Murawski, s. 307.

[13] Drugim istotnym powodem, dla którego sformułowany został program formalizmu i zaprogramowana została metamatematyka, było przeprowadzenie dowodu zupełności matematyki. I tutaj najpoważniejszy problem – zdaniem D. Hilberta – stanowiło zagadnienie z zakresu teorii zbiorów nieskończonych, mianowicie tzw. *problem continuum*. Matematyk z Getyngi był przekonany, że uda się udowodnić w aksjomatyce tradycji Zermelowskiej *hipotezę continuum*, sformułowaną po raz pierwszy przez G. Cantora (por. D. H i l b e r t, *Über das Unendliche*..., s. 305–307).

[14] Por. D. H i l b e r t, *Über das Unendliche*..., s. 305.

Gödla mówiło bowiem o tym, że jeśli system, w którym można zbudować arytmetykę liczb naturalnych, jest niesprzeczny, to nie da się owej niesprzeczności udowodnić za pomocą środków samej arytmetyki. Nie da się zatem uzasadnić niesprzeczności matematyki infinistycznej za pomocą środków finistycznych [15].

Tak więc cele programu D. Hilberta okazały się nierealizowalne [16]. Ale mimo to w matematyce XX w., w jej głównym nurcie, przetrwała idea posługiwania się metodami nieskończonościowymi i badania nieskończoności. Matematyka intuicjonistyczna, interesująca niewątpliwie z metamatematycznego punktu widzenia, nie zajęła uprzywilejowanego miejsca matematyki klasycznej. Ta ostatnia zaś, mimo niemożliwości dowiedzenia jej niesprzeczności metodami finistycznymi, stanowi potężne narzędzie determinujące poznanie rzeczywistości [17] i tworzenie współczesnej cywilizacji. Bez badań podstawowych, prowadzonych w ramach matematyki z „wkomponowaną” nieskończonością, nie byłoby współczesnej informatyki, powszechnego zastosowania komputerów w tak wielu dziedzinach życia, technik satelitarnych, telefonii komórkowej i w ogóle telekomunikacji, postępu w dziedzinach biologiczno-medycznych, którego pochodną jest ostatecznie lepsza ochrona życia i zdrowia. To tylko pewne przykłady, podaną listę można by znacznie przedłużyć. W każdym razie wniosek jest taki, że matematyka, właśnie ta z uwikłanym w nią pojęciem nieskończoności, ma ogromne znaczenie dla funkcjonowania współczesnej cywilizacji. Inaczej jeszcze: tego poziomu cywilizacyjnego nie można by nigdy osiągnąć, gdyby na zapleczu nie stało to potężne narzędzie teoretyczne o ogromnej liczbie zastosowań, jakim jest matematyka. Trzeba jeszcze raz dodać, że chodzi o matematykę, której „sercem” jest pojęcie nieskończoności, idea w sensie kantowskim.

DER BEGRIFF DES UNENDLICHEN IN DER MATHEMATIK

Zusammenfassung

Der präsentierte Text zeigt die Entwicklung der Idee der Unendlichkeit in der Geschichte der Mathematik. Er knüpft an den Gedanken von D. Hilbert an, um den Begriff des Unendlichen, welcher in der Mathematik angewendet wird, als eine Idee im Kantischen Sinn anzuerkennen.

---

[15] G. Gentzen, pracujący w getyńskiej szkole D. Hilberta, wykazał niesprzeczność arytmetyki, wykorzystując pojęcie indukcji pozaskończonej. Był to jednak dowód niesprzeczności matematyki infinistycznej, przeprowadzony za pomocą środków infinistycznych, a nie finistycznych, jak to postulował D. Hilbert.

[16] K. Gödel udowodnił również twierdzenie, że jeśli system, w którym można zbudować arytmetykę liczb naturalnych, jest niesprzeczny, to jest on niezupełny, co sprzeczne było z koncepcją D. Hilberta.

[17] Pytanie, dlaczego rzeczywistość jest „matematyczna”, dlaczego daje się poznawać przy zastosowaniu narzędzi teoretycznych, wypracowanych w matematyce, stanowi osobny, pasjonujący i żywo dyskutowany problem filozofii przyrody, filozofii nauki i filozofii matematyki.